655. D’Amore B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Enseñanza de la matematica*. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática). Vol. 17, n° 1, 87-106.

# Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza

**Bruno D’Amore**

Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia
Facultad de Ciencias de la Formación, Universidad de Bolzano, Italia
Alta Escuela Pedagógica, Locarno, Suiza
Escuela de doctorado de investigación, Universidad Distrital de Bogotá, Colombia
damore@dm.unibo.it – www.dm.unibo.it/rsddm

**Sunto.** *Con questo articolo si intende dare un contributo ad una visione unitaria di vari termini e concetti oramai diffusi nella comunità internazionale di chi si occupa di didattica della matematica, restituendo loro unitarietà e cercando le radici storiche del loro inserimento in tale comunità. Pur nelle diverse accezioni con cui oggi compaiono, molti di questi termini furono introdotti fin dalle origini, principalmente ad opera di Guy Brousseau, con uno sforzo di sintesi e di ridefinizione ad hoc. Essi si sono evoluti nel tempo ed alcune di tali evoluzioni riguardano i temi più classici; qui ci si limita all’esempio relativo al contratto didattico.*

**Summary.** *With this article we intend to give a contribution to a unitary picture of various terms and concepts, spread in the international community of those who deal with mathematics education, giving them back unity and looking for the historical roots of their introduction in that community. Although the different acceptation with which they appear today, many of these terms were introduced from the origin mainly by Guy Brousseau, striving for synthesis and ad hoc redefinition. They evolved in time and some these evolutions regard the most classical topics; we focus our attention on the example relative to the didactic contract.*

**Resumen**. *Con este artículo se quiere contribuir a dar una visión unitaria de varios términos y conceptos difusos en la comunidad internacional de quien se ocupa de didáctica de la matemática, restituyéndoles unitariedad y buscando las raíces históricas de su ingreso en dicha comunidad. Aún en sus diversas acepciones en las cuales hoy se usan, muchos de estos términos fueron introducidos desde sus orígenes gracias a la obra de Guy Brousseau, con un esfuerzo de síntesis y de redefinición ad hoc. Estos han evolucionado en el tiempo y algunas de dichas evoluciones atañen los temas clásicos; aquí nos limitamos al ejemplo relativo al contrato didáctico.*

**Résumé.** *Cet article veut donner une contribution dans la direction d’une uniformisation des termes et des concepts très diffusés dans la communauté internationale de la didactique des mathématiques, en leur donnant ainsi unitarité et en* *même temps en recherchant leurs racines historiques de leur insertion dans cette communauté. Une bonne partie de ces termes ont été introduits, avec la même signification d'aujourd'hui, par Guy Brousseau, grace à un effort de synthèse et de redéfinition ad hoc. Dans le temps, certains d'entre eux, concernant les thèmes les plus classiques, ont évolué; dans cet article on se borne à l'exemple relatif au contract didactique.*

**Resumo.** *Com este artigo pretendemos fornecer uma contribuição para uma visão unitária de vários termos e conceitos já tão difundidos na comunidade internacional daqueles que trabalham com didática da matemática, restituindo-lhes unidade e procurando as raízes históricas de sua inserção nessa comunidade. Apesar das diferentes acepções com que aparecem hoje em dia, muitos desses termos foram introduzidos, desde sua origem, principalmente por Guy Brousseau, graças a um esforço de síntese e de redefinição ad hoc. Tais termos evoluíram no tempo e algumas dessas evoluções são relativas aos temas mais clássicos; aqui limitamo-nos ao exemplo relativo ao contrato didático.*

**Zusammenfassung.** *Dieser Artikel will sein Beitrag im Sinne der Standardisierung der Begriffe und der Konzepte geben, die in der internationalen Gemeinschaft der Didaktik der Mathematik sehr verbreitet sind. So gibt man ihnen Einheitlichkeit und gleichzeitig versucht man die historischen Wurzeln ihrer Einfügung in dieser Gemeinschaft. Viele dieser Begriffe waren mit der heutigen Bedeutung von Guy Brousseau eingeführt, dank einer seltsamen Anstrengung von Synthese und Neudefinierung. In der Zeit einige unter ihnen, die die klassischeren Themen betreffen, haben sich entwickelt; in diesem Artikel beschränkt man auf das Beispiel des didaktischen Vertrags.*

## Epistemología, conocimiento y convicciones

El término "epistemología" entró a formar parte de la didáctica de la matemática a inicio de los años '60, portando con sí las diferentes acepciones que lo acompañan y que conducen a diversas "definiciones" e interpretaciones en cada país y en múltiples situaciones.
Mientras reenvío a Brousseau (2006a, b) para un análisis comparado y crítico de dicho término y de sus diversas exigencias, hago explícito el hecho que me referiré, aún si no lo digo abiertamente, a estos recientes dos trabajos de Brousseau y a otros trabajos suyos, todos estos citados en la bibliografía. Algunas de las frases que siguen fueron tomadas libremente de estos textos, sin cambiar el espíritu. Para no hacer pesado el texto, no citaré siempre los trabajos de Brousseau, lo que haré sólo en algunas ocasiones.
En nuestro campo de investigación:
una *concepción epistemológica* es un conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuales son los conocimientos de los individuos o de los grupos de personas, su funcionamiento, las formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto de enseñarlas y de aprenderlas;
la *epistemología* es un tentativo de identificar y de unificar diversas concepciones

epistemológicas relativas a una determinada ciencia, a un determinado movimiento ideológico, a grupos de personas, a instituciones o a culturas.
Para algunos de estos términos, seguimos la definición dada en D'Amore, Fandiño Pinilla (2004):

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios y de expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones de alguien (A) sobre algo (T) determina la *concepción* (K) de A con respecto a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S respecto a T. Generalmente, al puesto de "concepción de A respecto a T" se habla de "la imagen que A tiene de T".

Para otros términos, recurriremos a enciclopedias o manuales fidedignos:
por *saber* entendemos un conjunto de conocimientos o de actitudes reproducibles, adquiridos a través del estudios o de la experiencia.
En el ámbito de la psicología cognitiva se distinguen los *saberes* de los conocimientos:
los saberes son datos, conceptos, procesos o métodos que existen fuera del individuo que conoce y que son generalmente codificados en obras de referencia, manuales, enciclopedias, diccionarios;
los conocimientos son inseparables del individuo que conoce; es decir, no existe, un conocimiento a-personal; una persona que interioriza un saber *tomando conciencia,* transforma este saber en conocimiento.
Volvamos ahora al discurso didáctico; este es amplio y puede tener origen en varias raíces, una de las cuales tiene sede en el debate entre

## Didáctica y pedagogía

La *grande didáctica* de Comenius fue dura de morir: «un método único basta para enseñar todas las materias... las artes, las ciencias y las lenguas» (Comenius, 1657).
Fueron necesarios siglos para llegar a establecer en modo definitivo que las didácticas pueden ser, son, específicas; lo que le permitió a la didáctica (general) librarse del yugo de la pedagogía y a las didáctica específicas (disciplinares) a asumir un estatus como tales.[1]
Análogamente a la dirección que quisimos dar líneas arriba a la epistemología, podemos decir que la didáctica de un conocimiento (de un objeto, de un hecho, de una disciplina...) puede entonces ser definida como un proyecto social cuya finalidad es la de hacer que este conocimiento sea adquirido a través de un organismo.
Es en estas condiciones "sociales" que nos lleva a evidenciar algunas posibilidades peculiares de la

[1] Sin embargo, aún es mucho lo que se puede obtener estudiando esta obra, no del todo explorada por los críticos modernos. Un día lo haré.

## Didáctica de la matemática

1. La didáctica de la matemática (que para nosotros es un aspecto de la más general educación matemática) es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo (que puede ser un organismo cualquiera implicado en dicha actividad: una persona, una institución, un sistema, o incluso un animal).[2] El aprendizaje se considera aquí como un conjunto de cambios de comportamientos (por tanto de prestaciones) que señalan, a un observador predeterminado, según sujeto en juego, que este primer sujeto dispone de un conocimiento (o de una competencia)[3] o de un conjunto de conocimientos (o de competencias), lo que implica la gestión de diversos registros de representación, la creación de convicciones específicas, el uso de diversos lenguajes, el dominio de un conjunto de referencias idóneas, de pruebas, de justificaciones y de obligaciones. Estas condiciones deben poder ser puestas en acción y reproducidas intencionalmente. Se habla en este caso de prácticas didácticas.[4]
2. Estas prácticas didácticas son también "condiciones" y por tanto, a su vez, objeto de estudio. La didáctica se presenta entonces como el estudio de tales convicciones, bajo forma de proyectos y de efectivas realizaciones.
3. Los estudios científicos -de tipo experimental- en este campo necesitan de la explicitación de conceptos y de métodos que deben ser sometidos a exigencias de verificación de la coherencia y de adecuación a la específica contingencia. Ciertas teorías, como por ejemplo la teoría de las situaciones didácticas, tienen por objeto evidenciar los aspectos que estudia la didáctica.
Entre los objetos de estudio de la didáctica, un papel absolutamente fundamental, pero en ocasiones subordinado, se le asigna al

## *Milieu* (ambiente, medio)

De la teoría de las situaciones sabemos que el docente debe suscitar en el alumno comportamientos que el alumno mismo, para manifestar su conocimiento, deberá asumir autónomamente. Parece una paradoja. Más aún: es una paradoja. La única solución consiste en involucrar un tercer elemento, el *milieu*, y hacer que la respuesta del alumno se refiera exclusivamente a las necesidades del *milieu*, que el docente conoce bien, o predispuestas por él con esta finalidad. El arte del docente está entonces en la organización de una relación entre alumno y *milieu*, que:

- de una parte, deja una razonable incertidumbre, que los conocimientos del sujeto debe reducir;

[2] En este texto, *arte* debe entenderse como la traducción del latín *ars,* es decir, un sistema difícilmente distinguible entre los actuales términos *arte* y *artesanado*; *artista* era, en la acepción latina, cualquier artista (en el sentido moderno del término) pero también un artesano; aún más, en el mundo latino estas dos figuras confluían en una sola y no era posible una distinción.
[3]Para de la distinción entre conocimiento y competencia, véase D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla (2003).
[4] Para el tema de las prácticas, véase D'Amore (2005) y D'Amore, Godino (2006).

- de otra parte, tratar que dicha reducción se de en realidad, es decir, con un grado de incertidumbre limitado, del punto de vista del docente.

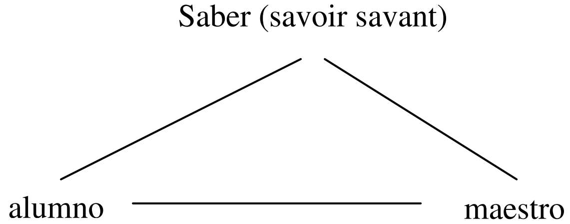
De aquí se entiende el papel del *milieu*, fundamental para entender el funcionamiento de la

## Teoría de las situaciones matemáticas

La *teoría de las situaciones matemáticas* (situaciones a-didácticas) tiene por objetivo definir las condiciones en las cuales un individuo se le conduce a “hacer” matemática, a utilizarla o a inventarla sin la influencia de condiciones didácticas específicas, determinadas o hechas explícitas por el docente.
Esta situación mira a la creación, a la organización y al uso de problemas que conducen a la construcción de conceptos y de teorías matemáticas por parte de un individuo con características y conocimientos mínimos, tales de hacer posible el desarrollo del proceso determinado por la situación.
Con base en los dos últimos puntos, las *situaciones* se pueden pensar como sistemas de interacción de uno o más individuos con un *milieu*, individuos que necesitan de un conocimiento previo para poder actuar.
Los elementos de la teoría se definen con base a la función que tienen en una dada situación.
Esto es análogo al método que, entre otras cosas, es el más usado en matemática, según el cual un objeto se define sobre la base de relaciones con otros objetos (axiomas o definiciones).
Así, un *evento didáctico* se convierte en un conjunto de hechos que se interpretan a partir de la evolución de una situación didáctica. Dicha interpretación es uno de los objetivos de la didáctica de la matemática; esta lleva a la concepción de *microdidáctica* entendida como el estudio de las condiciones de difusión o de intercambio de conocimientos (por ejemplo a través de las lecciones), entre personas, organizaciones sociales, económicas o culturales.
Para representar esquemáticamente esta situación, se recurrió, en la historia reciente, a varios esquemas que Brousseau llama

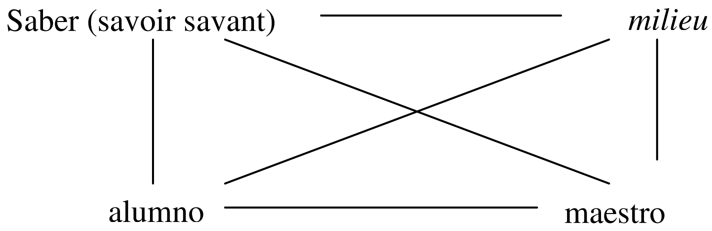
## “Polígonos” de la didáctica

El más conocidos es el *triángulo de la didáctica*:[5]

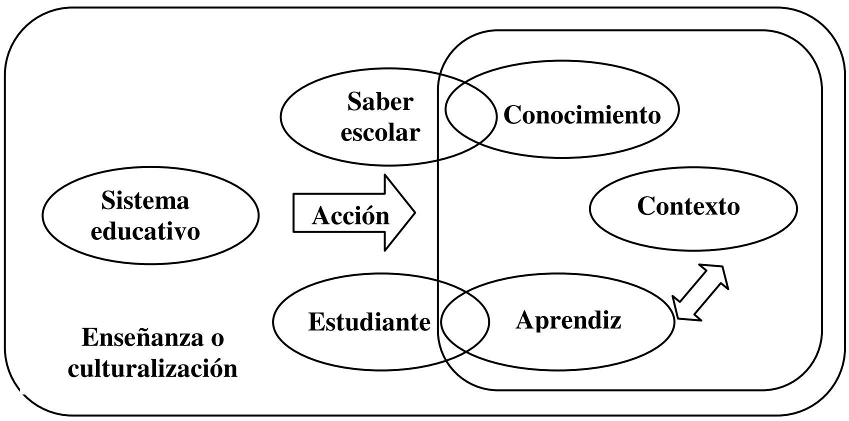



[5] Un análisis crítico y constructivo del triángulo de la didáctica se encuentra en D’Amore, Fandiño Pinilla (2002).

Pero en dicho esquema no aparece el *milieu,* lo que evidencia su insuficiencia. Introduciendo este nuevo "vértice", se puede pasar a un *cuadrilátero de la didáctica*:




También este esquema se revela insuficiente si consideramos el hecho que en este, no se evidencia la diferencia entre "saberes" escolares, de enseñar o enseñados, y los "conocimientos" del alumno; que no coinciden entre ellos y que funcionan según modalidades diversas; además, las peculiaridades de las actividades del sujeto que aprende son diversas, lo que lleva a pensar por lo menos en un "hexágono de la didáctica", presentado por Brousseau en este esquema donde se resalta su significado funcional.




En el futuro, debemos entrar cada vez más en profundidad en el análisis de este esquema y de sus significados relacionales implícitos. Y usarlo para estudiar los eventos didácticos en aula.

Antes de pasar al significado de "resultado de investigación en didáctica de la matemática" y, finalmente, a ejemplos de contrato didáctico, deseo subrayar como las relaciones entre didáctica y epistemología se revelan sólo durante la realización de una investigación, en casos específicos y ejemplares.

## Obstáculos epistemológicos: un ejemplo histórico que cambió la imagen de la didáctica

Es bien conocido el hecho que Guy Brousseau estudió por casi tres décadas (desde inicio de los años ’60 y por toda la década de los 80) como se aprenden los números naturales y su estructura. Por toda la década de los ’60 (y, en algunos casos, incluso después) dominaban ciertas ideas que hoy encontramos curiosas, cuya base la encontramos en diversas “teorías”, sobre el aprendizaje de los números naturales por parte de niños que iniciaban la escuela primaria. Por ejemplo, era considerado obvio que, para que se diera el aprendizaje, oral y escrito de los números naturales, se debía proceder según la escansión de la sucesión ordinal, primero 1, después 2, después 3 y así sucesivamente. En ese entonces se insistía fuertemente en el uso de materiales pre-confeccionados basados en ésta supuesta necesidad y por tanto la reforzaban.
Creo que es igualmente conocido el hecho que Brousseau *demostró* ampliamente que esta idea era completamente falsa y que el aprendizaje de los naturales se da “a saltos”. Creo también, que todos conocen el estudio antropológico y epistemológico, del mismo autor, sobre la escritura de los números, comparando tres sistemas diversos:
el (1°) llamado “de Robinsón Crusoe” (una marca por cada unidad, con un espacio entre cada una de estas marcas),
el (2°) de los antiguos romanos, y
el (3°) de ciertos materiales estructurados o pre-confeccionados con este único objetivo,
con el sistema posicional árabe - hindú en base diez.
Él introdujo la idea de “zonas de mayor eficacia” para mostrar la existencia de intervalos numéricos en los cuales un sistema de escritura es más eficaz que otro. Por ejemplo, para el intervalo 1-3, el método de Robinsón es más eficaz que la escritura romana y que nuestra numeración decimal (tanto para el uso como para el aprendizaje). En el intervalo 100 - 1000, el orden es inverso. Continuando en esta dirección y estudiando otros intervalos intermedios, Brousseau sugiere un “aprendizaje a saltos” que propuso a finales de 1965 en un libro destinado a la escuela primaria publicado por Dunod (Brousseau, 1965). Dicho aprendizaje puede darse “por invención”, que es típico de las situaciones a-didácticas.
El estudio continuó con el aprendizaje de las operaciones, pero el método podía extenderse al estudio del aprendizaje de un algoritmo y al de una teoría matemática. Y, de aquí, al de todo conocimiento...
Los saltos de complejidad “informacional” son, por tanto, más frecuentes y mejor justificados en el descubrimiento matemático, con respecto a la progresión paso a paso. De otra parte, los alumnos encuentran grandes dificultades en la zonas de transición entre ciertos intervalos numéricos. Estos dos indicios llevaron a Brousseau a la hipótesis según la cual el fenómeno de los saltos era general, al menos en matemática, y que su análisis debería ser la base de toda ingeniería didáctica.
Esta idea fue expuesta en 1976: hace más de treinta años!
Fueron estos tipos de estudios los que condujeron, en oposición a cuanto

declaraba Gastón Bachelard (1938) a propósito de la inexistencia en matemática de los obstáculos epistemológicos, a la introducción de este concepto al interno de la investigación didáctica. La comprensión de los números naturales exige, por ejemplo, un cierto modo de concebir estos números y sus operaciones: un número natural como 4 tiene un sucesivo, su producto por otro número natural será más grande de éste etc. Algunas de estas propiedades pueden dar origen a errores cuando 4 es un número racional: por, ejemplo, no se puede hablar de sucesivo. Pero el estudiante no se da cuenta de este pasaje y continua a "forzar" las propiedades de N también en Q; es por esto que se encuentran estudiantes que afirman, en Q, que 2.33 es el sucesivo de 2.32, confirmado incluso por algunos libros de texto. Además, por ejemplo, $0.7 \times 0.8 = 0.56$ donde 0.56 es menor que cada uno de los factores, es una novedad desconcertante que pone en crisis el conocimiento adquirido precedentemente.
El estudiante, decía, casi no se da cuenta de esta transformación del saber. El docente llama "multiplicación" o "división" nuevas operaciones que desearía que sus alumnos "reconocieran" y "asimilaran" a las precedentes. El conocimiento de los números naturales es indispensables para adquirir el conocimiento de los números racionales pero, al mismo tiempo, es un obstáculo para el aprendizaje de este nuevo saber. Este fenómeno crea malentendidos y dificultades importantes e invisibles porque los obstáculos se esconden al interno de un saber que funciona pero sólo "localmente" y no generalizable al objeto matemático que se debería aprender.
Este es el sentido mismo de la idea de *obstáculo epistemológico.*
Nos falta aún clarificar lo que se entiende con

## "Resultados" de las investigaciones en didáctica de la matemática

Aquello que nosotros llamamos "resultados" son principalmente de dos topologías, según Brousseau:

- afirmaciones (no contradichas) sobre un vasto campo de experiencia;
- negación de convicciones contradichas por las experiencias.

Ejemplos de resultados del primer tipo:
1. El conocimiento que un sujeto puede tener de un determinado saber matemático depende de las circunstancias en las cuales ha tenido ocasión de utilizarlo; este es un axioma básico de las situaciones didácticas que nunca ha sido contradicho.
2. Es posible enseñar la matemática en forma relativamente directa con un sentido implícito correcto, y limitar así la transposición didáctica.
3. Es posible determinar condiciones hasta cierto punto reproducibles del *uso* y de la *adquisición* de los conocimientos matemáticos bajo forma de sistema (las "situaciones"); igualmente, es relativamente posible determinar condiciones (diversas) hasta cierto punto reproducibles de su *enseñanza*.
4. Es posible comunicar estas condiciones a los maestros. Es preferible, por tantos motivos, comunicarles las situaciones antes que algoritmos cerrados o indicaciones demasiado generales. Este último punto tiene varias repercusiones sociales.
Ejemplos de resultados del segundo tipo.

1. La idea que la historia individual de un sujeto que aprende pueda ser expresada en términos de unión sucesiva de conocimientos definitivos, desde la infancia hasta la universidad, es una aproximación no precisa. Tomada a la letra genera equívocos, decisiones falaces y fracasos. Las concepciones resultan limitadas y deformadas, no siempre de forma explícita. Es indispensable retomar y reorganizar el saber matemático, incluso cuando este saber se considera adquirido.
2. El constructivismo radical es una teoría apropiada para las situaciones a-didácticas, pero inapropiada para las situaciones didácticas. La institucionalización del conocimiento es una etapa indispensable del aprendizaje, la cual constituye una parte del mismo saber en relación con los conocimientos.
3. Las actuales descripciones de los conocimientos matemáticos de los alumnos (en sentido administrativo y popular) son inapropiadas. Estas descripciones conducen a padres, maestros y administradores a subestimar los resultados de la actividad didáctica. El uso de estas descripciones para tomar decisiones acerca de la política de enseñanza, del currículo, de las leyes, de los organismos, sin conocimientos didácticos adecuados, lleva a consecuencias desastrosas. Lleva, además, a los maestros a dedicar toda la atención a la adquisición de saberes por parte del alumno, dejando en segundo plano el problema del mantenimiento de los conocimientos, indispensables a la génesis de los saberes mismos. Esta degeneración del ambiente didáctico causa al final un deterioramiento del conocimiento efectivo y de los saberes de los alumnos, que re-alimenta el sistema de decisiones negativas.
De todo esto emerge la necesidad de conocer los usos y las necesidades del conocimiento epistemológico por parte del docente; sin embargo existe una epistemología que se puede llamar (Speranza, 1997, Brousseau, 2006a)

## Epistemología espontánea del los maestros

Para tomar decisiones en el aula, los maestros usan explícita o implícitamente todo tipo de conocimientos, de métodos y de convicciones acerca de la forma como se busca, se aprende o se organiza un saber. Este bagaje epistemológico se construye, esencialmente, de forma empírica para responder a las necesidades didácticas.
Este es, a veces, el único medio que les permite proponer los procesos didácticos y hacer que sean aceptados por sus alumnos y su ambiente. El conjunto de las convicciones de los maestros, de los alumnos, o de los padres acerca de lo que conviene hacer para enseñar, para aprender y para comprender los saberes en juego, constituye una *epistemología* práctica que es imposible ignorar o eliminar. La epistemología filosófica o científica está lejos de pretender asumir este papel.
La epistemología espontánea funda sus raíces en una práctica antigua, dado que la tendencia a comunicar experiencias de una generación a la siguiente es una característica esencial del género humano. Sería absurdo oponerla a los conocimientos científicos: es necesario respetarla, comprenderla y estudiarla experimentalmente, como un fenómeno "natural".
El beneficio de la introducción de la epistemología y de las teorías científicas en referencia con la formación de los maestros se presenta entonces con un aspecto

nuevo (D'Amore, 2004).
Pero, antes de continuar, considero necesario presentar un ejemplo preciso de como funcionan estos dos tipos de epistemologías. Lo haré a través de un ejemplo tomado de Brousseau (2006b).

## La doble constricción de las situaciones didácticas

El maestro propone a sus alumnos un problema que él considera ser *análogo* a un problema que les había dado en precedencia, pero en el cual no habían logrado el éxito esperado. Él espera que sus estudiantes reconozcan la similitud y que utilicen las correcciones y las explicaciones que él les ha dado para *reproducir* el mismo método de solución, de forma tal que puedan afrontar con éxito la nueva situación. Él los induce fuertemente a buscar y a utilizar esta analogía. Este proceso logra el resultado esperado, es decir, a los ojos del maestro el resultado es positivo. Pero en realidad este proceso es un fraude epistemológico. El alumno da una respuesta exacta, pero no como resultado de la comprensión de la necesidad matemática o lógica a partir del enunciado, no porque haya "comprendido y resuelto el problema", no porque haya adquirido el objeto matemático, sino porque, simplemente, estableció una semejanza con otro ejercicio; él sólo reprodujo una solución que otros hicieron por él. Lo que es peor aún, él es consciente que esto era lo que el maestro esperaba. Creerá de haber comprendido la cuestión matemática en juego, cuando no ha hecho otra cosa que interpretar una intención didáctica explícitamente enunciada por el maestro y dar la respuesta esperada.
Este "abuso de la analogía" que Guy Brousseau puso en evidencia en los años '70, y sobre el cual se basan aún hoy muchas acciones didácticas en el aula, es una de las formas más frecuentes de aquello que él mismo definió "efecto Jourdain", uno de los efectos del contrato didáctico. El maestro obtiene la respuesta esperada con medios que no tienen ningún valor y le hace creer al alumno (a la familia, a la institución) que ha realizado una actividad matemática que era el objetivo de alcanzar.
La actividad del alumno debe responder por tanto a dos constricciones incompatibles:

- aquella determinada por las condiciones a-didácticas que determinan una respuesta original y la organización de conocimientos específicos;
- aquella determinada por las condiciones didácticas que tienen como objetivo dar la respuesta esperada, independiente de la modalidad de producción.

Este ejemplo muestra que si la epistemología y las ciencias cognitiva pueden estudiar, dar razón, de las respuestas de los alumnos bajo la primera y única constricción, estas no pueden pretender de ayudar a los maestros ignorando la segunda. Las constricciones didácticas terminaran con oprimir las constricciones cognitivas. Estas transforman la naturaleza misma del conocimiento y su funcionamiento. De esta forma, el maestro aparece como la simulación de las génesis de los conocimientos.
Todo esto explica el por qué de la necesidad de estudios específicos, de didáctica de la matemática, que no pueden ser reconducidos ni a teorías del aprendizaje ni a

estudios exclusivamente epistemológicos. El contrato didáctico, por su fuerza y por sus características extraordinarias, será objeto de sucesivos ejemplos. Guy Brousseau reveló a la comunidad científica la importancia de este objeto desde los años '60.

## La interpretación de eventos de aula a la luz de instrumentos de la investigación didáctica: el ejemplo del contrato didáctico

En una investigación relacionada con problemas con datos insuficientes y sobre la actitud de los alumnos frente a problemas de este tipo (D'Amore, Sandri, 1998) presento a un texto propuesto a alumnos del 3° grado (8 - 9 años) y a alumnos del 7° grado (12 - 13 años):

«Giovanna y Paula van al mercado. Giovanna gasta 10.000 liras y Paula gasta 20.000 liras. Al final ¿a quien le queda más dinero en la bolsa, a Giovanna o a Paula?».
Presento el prototipo de respuesta más difundida en el 3° grado; elijo para esto el protocolo de la respuesta dada por Stefania, que reporto exactamente como lo redactó a alumna:

> Stefania:
>
> En la bolsa le queda más dinero a giovanna
> 30-10=20
> 10×10=100

Tratándose de un "contrato", de tiempo hallo las "constantes de comportamiento" que se pueden llamar "cláusulas";[6] en el caso en cuestión juegan un papel formidable dos de estas:
*cláusula de las expectativas*: la maestra espera ciertamente una respuesta, por tanto debo darla, no importa el sentido del texto;
*cláusula de la constancia*: la maestra ha dado *siempre* problemas con un texto escrito donde hay palabras y números y, para dar el resultado, siempre hago operaciones con estos números; sí, *siempre* ha sido así, por tanto, *también* esta vez será por fuerza así.
La respuesta "Giovanna" (58.4% de dicha respuesta en alumnos de 8 - 9 años) puede ser justificada por el hecho que el estudiante considera que, si el maestro da un problema, este *debe poderse resolver;* por tanto, aún si se da cuenta que falta el dato de la suma inicial, se lo inventa implícitamente más o menos como sigue: «Este problema *debe* ser resuelto, por tanto, quizás Giovanna y Paula partieron con la misma suma de dinero». A este punto, *la respuesta es correcta:* Giovanna gasta menos y como consecuencia le queda más dinero. Esto justifica la parte escrita de la respuesta de Estefanía. A este punto se acciona otro mecanismo

[6] Para esta idea, que comencé a usar en los primeros años '90, tomé como punto de partida Chevallard (1988) que, hablando de *metacontrato*, citaba este mismo término aunque con otro sentido.

relacionado con otra cláusula (del tipo: imagen de la matemática, expectativas presupuestas por parte del maestro): «No puede bastar así, en matemática se deben hacer operaciones, la maestra se lo espera con toda seguridad». A este punto, el control crítico se desploma y ... cualquier operación está bien.
En el trabajo D'Amore, Sandri (1998), a esta cláusula del contrato didáctico la llamamos: "exigencia de la justificación formal" (ejf), la cual estudiamos detalladamente (incluso en trabajos sucesivos). Dicha cláusula ejf está fuertemente presente en los sucesivos grados escolares (11 - 14 años). [El porcentaje de la respuesta "Giovanna" baja del 58.4% del 3° grado (8 -9 años) al 24.4% del 7° grado (12 - 13 años); pero sólo el 63.5% de los alumnos del 7° grado denuncia, usando algún tipo de estrategia, la imposibilidad de dar una respuesta; por tanto el 36.7% no da la respuesta correcta: más de 1/3 en promedio].
Veamos un prototipo de respuesta dada al mismo problema en un 7° grado; elijo el protocolo de respuesta de una alumna, Silvia, reportándolo exactamente como la alumna lo escribió:

Silvia:

Para mi, le ha quedado más dinero en la bolsa a Giovanna,
porque:
Giovanna gasta 10.000 mientras Paula gasta 20.000,
10.000 20.00
Giovanna Paula
20.000-10.000=10.000 (dinero de Giovanna)
10.000+10.000=20.000 (dinero de Paula)

En el protocolo de Silvia se reconocen las mismas cláusulas del contrato didáctico puestas en acción en el protocolo de Estefanía, pero su análisis es más complejo. En primer lugar, se nota un intento de organización lógica y formal más vinculante. Silvia, inicia escribiendo espontáneamente "Giovanna" sin hacer ninguna operación, dado que ha razonado como Estefanía, pero después, a causa de la cláusula ejf, considera que *debe* hacer alguna operación. Es probable que se de cuenta, aunque en forma confusa, que las operaciones que está por realizar no tienen ninguna relación con la lógica del problema, las hace sólo porque considera que *debe hacer* alguna operación. Pero, por cuanto absurdas, termina por asumirlas como si fueran plausibles: tal es su convencimiento que, dado que de estas operaciones, sin ningún sentido, obtiene un resultado que contrasta con aquel obtenido por vía intuitiva, prefiere doblegar su propia intuición y acepta el resultado obtenido por vía "formal": las operaciones le dan como resultado "Paula" y no "Giovanna", como lo había supuesto, y es así que cancela "Giovanna" y a su puesto escribe "Paula":

Paula
Para mi, le ha quedado más dinero en la bolsa a ~~Giovanna~~
porque:
Giovanna gasta 10.000 mientras Paula gasta 20.000,

10.000 20.00

Giovanna Paula

20.000-10.000=10.000 (dinero de Giovanna)

10.000+10.000=20.000 (dinero de Paula)

El contrato didáctico, que en esta ocasión fue dictado por una imagen formal (vacía, deletérea) de la matemática, ganó, derrotando la razón ...

En D'Amore (1993), cuento una experiencia cuya base es el siguiente texto, propuesto a alumnos de primaria de diferentes grados:
«Los 18 alumnos del grado 2° desean hacer una excursión de un día de Bologna a Verona. Deben tener presente los siguientes datos:
-dos de ellos no pueden pagar;
- de Bologna a Verona hay 120 km de distancia;
- un bus de 20 puestos cuesta 200.000 liras al día más 500 liras por cada km de recorrido (incluidos los peajes).
¿Cuánto debe aportar cada uno de los alumnos?».
Inútil decir que se trata de un problema complejo, que la excursión realmente se estaba planeando, y que los alumnos habían sido invitados a discutir el problema y a trabajar en grupo para dar una respuesta.
De hecho, la mayor parte de los estudiantes, frente a la resolución de este problema, comete un error recurrente: no tiene en cuenta el viaje de regreso y calcula por tanto el gasto total con la expresión $500\times120+200.000$ al puesto de $[(500\times120)\times2]+200.000$.
Existe una basta bibliografía que trata de justificar el por qué de elecciones de este tipo. Una de las justificaciones que con mayor recurrencia se propone es una especie de ... olvido estratégico o afectivo: en una excursión la ida es un momento emotivamente fuerte, el regreso no.
Intentando entender mejor la situación, separé el problema en varias componente o fases, con "preguntas" parciales específicas; pero el error se repetía. A este punto, sugerí a algunos docentes que propusieran a los alumnos la representación teatral del problema, haciendo énfasis en la ida y el regreso, y el diseñó de los diversos momentos de la excursión. Un caso muy interesante que encontré y que describí en D'Amore (1993) es él de un alumno que diseñó el siguiente cartel:

Bologna → Verona
120 Km

Verona → Bologna
120 Km

Por tanto, existía perfecta conciencia del hecho que, en una excursión, hay una "ida" y un "regreso"; pero después este mismo alumno, al momento de resolver el problema, utiliza sólo el dato de ida.

Una de las justificaciones que con mayor presencia daban los alumnos, cuando se les entrevistaba, es que ellos no se sienten autorizados a usar un dato que no aparece explícitamente en el texto. Cuenta poco el *sentido de la pregunta* contenida en los problemas de matemática, lo que cuenta en realidad es hacer uso de los datos numéricos explícitamente propuestos como tales. Uno de los alumnos entrevistado, declara: «Si tu querías que calculáramos también el regreso, debías habérnoslo dicho»; es evidente la laguna que el alumno advierte: en ninguno de los datos aparece lícito duplicar el gasto por el recorrido en kilómetros. El contrato didáctico impone reglas de comportamiento y, como explicaba Brousseau, las constricciones didácticas se imponen sobre las a-didácticas.

Resulta interesante leer la actitud de los estudiantes frente al siguiente problema de Alan Schoenfeld (1987):
«Un bus del ejercito transporta 36 soldados. Si 1128 soldados deben ser transportados en bus al campo de adiestramiento, ¿cuántos buses deben ser usados?».
De los 45.000 alumnos, de 15 años, testados en Estados Unidos por Schoenfeld, sólo menos de un cuarto (el 23%) dio la respuesta esperada, es decir 32. El investigador estadounidense afirma, por tanto, que son muy pocos los estudiantes en grado de releer el sentido de la pregunta, osando escribir 32, de hecho no obtenido formalmente de la operación, y propone como causa de este comportamiento cuestiones relativas a hechos meta-cognitivos. La explicación de este evento, según el Autor, está en una laguna en los procesos meta-cognitivos, por tanto en el hecho que los estudiantes, una vez obtenido el resultado numérico, después de un proceso aritmético de resolución del problema, no están en grado de volver sobre sus pasos, releer críticamente el texto, darse cuenta de la pregunta efectivamente formulada, e interpretar el resultado obtenido para dar la respuesta correcta.
A distancia de algunos años, quisimos analizar nuevamente esta misma situación (D'Amore, Martini, 1997), entrevistando a los alumnos, cosa que Schoenfeld no pudo hacer, encontrando nuevos aspectos. La prueba fue propuesta en diversos niveles escolares, agregando una variable, es decir, se dejó libre la elección de usar o no la calculadora. Obtuvimos muchas respuesta del tipo: 31,333333 particularmente de quienes usaban la calculadora; otras respuestas fueron: $31.\overline{3}$ y 31,3.
El control semántico, cuando existe, conduce a algunos a escribe 31 (los «buses no se pueden partir»), pero muy pocos se sienten *autorizados* a escribir 32. De resaltar el hecho que, entre quienes utilizaron la calculadora, el 0% de alumnos dieron la respuesta "32".
La entrevista muestra que el estudiante no se siente autorizado a escribir aquello que no aparece: aún haciendo un control semántico acerca de los buses como objetos no divisibles en partes, esto no lo autoriza a escribir 32; algunos, de hecho, no se sienten autorizados ni siquiera a escribir 31; no se puede hablar simplemente de "error" por parte del estudiante, a menos que no se entienda por error la incapacidad de controlar, una vez obtenida una respuesta, si esa es semánticamente coherente con la pregunta dada; pero entonces se activa otro

mecanismo: el estudiante no se muestra dispuesto a admitir de haber cometido un error y prefiere hablar de un “truco”, de una pregunta “capciosa”; para un estudiante un error matemático o en matemática, es un error de cálculo o reducible a esto, no acepta que se considere como error una no correcta interpretación semántica.
Un largo y sistemático estudio de esta prueba, seguido incluso de numerosas entrevistas a los estudiantes, revela que “el culpable” de este comportamiento es una cláusula del contrato didáctico, a la cual dimos el nombre de “cláusula de la delegación formal”. El estudiante lee el texto, decide la operación a realizar y los números con los cuales debe operar; a este punto se desencadena, precisamente, la cláusula de *delegación formal*: no es tarea del estudiante razonar o controlar, no considera como responsabilidad personal lo que sigue. Ya sea si los cálculos se hacen con lápiz y papel, *más aún* si se recurre a la calculadora, se instaura aquella cláusula que limita las facultades racionales, críticas, de control: la tarea del estudiante terminó y ahora es responsabilidad del algoritmo, o mejor aún, de la máquina, trabajar para él. La tarea sucesiva del estudiante será transcribir el resultado, sea cual sea, sin importar si este tiene relación significativa con el contexto problemático del cual había partido.

Este hecho explica también otro evento didáctico. Es bien conocido el ejemplo de Efraim Fischbein (1985):
$P_1$. Una botella de naranjada, que contiene 0.75*l*, cuesta 2 dólares. ¿Cuál es el precio de 1*l*?
$P_2$. Una botella de naranjada, que contiene 2 *l,* cuesta 6 dólares. ¿Cuál es el precio de 1*l?*
Si se da como consigna revolver sólo $P_1$, ocultando a la vista $P_2$, siempre se notará entre los presentes un tiempo de incomodidad más o menos largo. Dado poco tiempo después $P_2$, muchos estarán dispuestos a admitir con sinceridad que, mientras el segundo problema se resuelve inmediatamente con la división 6÷2, resolver el primero con la división *análoga* 2÷0.75 crea un gran malestar.
Veamos el comentario que hace el mismo Fischbein (1985): «Como consecuencia se puede suponer que son precisamente los números y las relaciones entre estos a bloquear o a facilitar el reconocimiento de la operación de división como proceso de resolución. Cada operación aritmética posee, además a su *significado formal*, también uno o más *significados intuitivos*. Los dos niveles pueden coincidir o no».
[Un análisis profundo de estos y muchos otros casos análogos se encuentra en D’Amore (1999) y en D’Amore (2003). Por esto, aquí me limito a pocas palabras].
En varias ocasiones he solicitado a docentes y a alumnos que procesos siguieron para resolver $P_1$. Algunos han confesado haber considerado 0.75 como ¾ y de haber procedido en el campo de las fracciones (proceso no siempre realizado con el resultado esperado). Otros admiten haber resuelto $P_1$ con la proporción $0.75:2::1:x$ y, después, haber aplicado las propiedades conocidas en este campo para resolverlo (con éxito). Veamos atentamente este proceso; en el curso de la solución de la ecuación lineal con incógnita $x$, se llega, en un determinado momento, a realizar 2÷0.75; esta es, aparentemente, la misma operación que,

realizada directamente con los datos del problema, hubiera resuelto $P_1$ en un santiamén. Pero no es la misma cosa. Si es verdad, como indiscutiblemente lo es, que existe una fuerte resistencia en muchos de nosotros a realizar $2 \div 0.75$ (a causa del choque entre significado formal y significado intuitivo de la división), no se presenta ninguna incomodidad cuando, llegando al momento final, después de la aplicación de reglas de las proporciones y en la realización de los *pasos de un algoritmo,* se le pide resolver *aparentemente* la misma operación. Aquí, como ya sabemos, se pone en acción una cláusula del contrato didáctico, aquella de la *delegación formal*: en un cierto sentido, no nos esforzamos directamente en el pasaje, deja de ser una cuestión de elección, de decisiones personales; se deja al algoritmo, al cálculo, todo crédito de la resolución del problema, una especia de no-responsabilidad de quien está resolviendo.[7]

En el curso de una prueba sobre las capacidades de los alumnos para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, el docente propuso, entre otras, la ecuación $(x - 1)(x - 3) = 0$. No había sucedido antes: las ecuaciones no habían sido presentadas como producto de binomios, siempre en la forma canónica. Los alumnos de toda la clase, interpretaron la solicitud como una constricción determinada por las condiciones didácticas que tienen como objetivo hacer que los estudiantes produzcan la respuesta exacta, independiente dela modalidad de producción. Por tanto, en cambio de responder $^{+}1$ y $^{+}3$, han multiplicado los dos binomios obteniendo la ecuación en la forma canónica habitual, y dando sólo después de esto las raíces $^{+}1$ y $^{+}3$. [obviamente, algunos alumnos se equivocaron en los cálculos obteniendo raíces del todo diversas]. Este comportamiento, inútil insistir, se explica muy bien con el contrato didáctico.

## Conclusiones

No quisiera haber dado la idea que el contrato didáctico actúe sólo en jóvenes alumnos o en los primeros años de escolaridad; abundan ejemplos en los altos grados de escolaridad y incluso en los cursos para docentes de matemática, en formación inicial o en servicio (Fandiño Pinilla, 2005; Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006). Se trata por tanto de un instrumento potente para analizar los eventos del aula, uno de los tantos que nos regaló los apasionados y pluri-decenales estudios de Guy Brousseau, sin duda el pionero en este campo.

En relación con sus ideas iniciales, las cuales han evolucionado en el tiempo, muchos investigadores se han centrado en la búsqueda de ejemplos y en la exploración siempre más en profundidad del concepto; pero haciendo así, muchos Autores terminaron con interpretar en formas diversas la idea originaria (Sarrazy, 1995).

Esto no limita, según mi opinión, la fuerza del instrumento, por el contrario, la amplía mostrando, con un ejemplo dúctil y de gran potencia, la importancia de los

---

[7] Sobre este mismo tema, existe un trabajo de Brousseau (1987); en un tabla a página 59, el Autor analiza el siguiente problema: Imaginemos que se pague 0.2 £ por 0.75 litros. Afirma Brousseau que la división $0.2 \div 0.75$ resulta aún más sorprendente que la división $2 \div 0.75$.

estudios que han cambiado nuestra comunidad en los últimos 40 años.

## Bibliografía[8]


Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. París. Vrin.

Brousseau G. (1965). *Les mathématiques du cours préparatoire*. París: Dunod.

Brousseau G. (1972). Processus de mathématisation. *La mathématique à l'école élémentaire*. 428-457.

Brousseau G. (1975). Exposé au colloque «L'analyse de la didactique des mathématiques» (13-15 marzo 1975). Actas publicados por el Irem de Bordeaux.

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En: Wanhamme W., Wanhamme J. (editores) (1976). [Republicado en. *Recherches en didactique des mathématiques*. 4, 2, 1983, 165-198].

Brousseau G. (1977); entre 1970 y 1973 Guy Brousseau publicó diversos artículos en los cuadernos del Irem de Bordeaux que tenían como nombre: «Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73»; pero, después, estas publicaciones continuaron hasta 1978. Aquí hago referencia a una de estas publicaciones para uso interno, la número 18, en la versión editada en Barcelona en 1977.

Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau G. (1980). L'échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*. 41, 177-182.

Brousseau G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2, 1, 37-127.

Brousseau G. (1982). À propos d'ingénierie didactique. Univ. de Bordeaux I, Irem. [Mecanografiado].

Brousseau G. (1983), *Théorisation des phenomenes d'enseignements des mathématiques*. Tesis de Doctorado, Bordeaux.

Brousseau G. (1984). The crucial role of the didactical contract. *Proceedings of the TME 54.*

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.

Brousseau G. (1987). Représentations et didactique du sens de la division. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*. Actas del coloquio de Sèvres, mayo 1987. Grénoble: La Pensée Sauvage. 47-67.

Brousseau G. (1988). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de


[8] Por deber y por honestidad debo reconocer que en la bibliografía se citan varios trabajos pioneros de Guy Brousseau, muchos de los cuales es difícil encontrarlos hoy, aunque no hayan sido expresamente citados en el curso de este artículo. Considero el presente trabajo una contribución modesta a la reconstrucción temática histórica, un homenaje al estudiosos francés.

collège. *Petit x*. 21, 47-68.
Brousseau G. (1989). La tour de Babel. Études en didactique des mathématiques. 2. Irem de Bordeaux.
Brousseau G. (1989). Obstacles épistémologiques, conflicts socio-cognitifs et ingéniérie didactique. En: Bodnarz N., Garnier C. (editores) (1989). *Les obstacles épistémologiques et le conflit socio-cognitif. Construction des savoirs (obstacles et conflits).* Coloquio internacional CIRADE, Universidad de Québec, Montreal.
Brousseau G. (1991). L'enjeu dans une situation didactique. Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques. Irem de París VII. 147-163.
Brousseau G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. En: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (editores) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Brousseau G. (1995). L'insegnamento di un modello dello spazio. En: Gallo E., Ferrari M., Speranza F. (editores) (1995). *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi*. Cuadernos CNR, n. 15. Pavía.
Brousseau G., Brousseau N. (1987). Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire. Bordeaux, Univ. de Bordeaux I, Irem.
Brousseau G., Centeno J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques*. 11, 2-3, 167-210.
Brousseau G., Pères J. (1981). Le cas Gaël. Universidad de Bordeaux I, Irem.
Brousseau G. (2004). Les représentations: étude en théorie des situations. *Revue des Sciences de l'Éducation*. XXX, 2.
Brousseau G. (2006a). Epistemologia e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 621-655.
Brousseau G. (2006b). Epistemologia e formazione degli insegnanti. En: Sbaragli S. (editor) (2006). *La matematica e la sua didattica, venti anni di impegno*. Actas del Congreso internacional homónimo. Castel San Pietro Terme, 23 septiembre 2006. Bologna: Pitagora. 54-58. Publicado además en: D'Amore B. (editor) (2006). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Número especial monotemático de *Rassegna*. 29, 29-33.
Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Irem d'Aix-Marseille. 14.
Comenius J.A. [Komenský J.A.] (1657). *Didactica Magna*. Ámsterdam. Véase la edición: von Flitner A. (editor) (1966). *Die große Didaktik*. Düsseldorf y München: Helmut Küpper.
D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Proyecto Ma.S.E., vol. XA. Milán: Angeli. Prefacio de G. Vergnaud. [II edición 1996]. [En idioma español: Madrid: Editorial Síntesis, 1997, traducción de F. Vecino Rubio]. Existe una edición actualizada sobre la misma temática en: D'Amore B. (2003). *Problemi di matematica nella scuola primaria*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora. Edición en idioma español con anexos e integraciones: D'Amore B. (2006).

*Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio. Edición en portugués en curso.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. Edición en idioma español: D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Barcelona e México DF: Reverté – Cinvestav. Edición en idioma portugués: D'Amore B. (2005). *Epistemologia e didáctica da matemática*. São Paulo: Escrituras.
D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30. En idioma español (2004): El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. 60, 20, 3, 413-434.
D'Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.
D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50. 30. En idioma español (2004): Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*. 58, 20, 1, 25-43. [534]
D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B., Martini B. (1997). Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-175. En idioma español (1997): *Números*, 32, 26-32. En francés : *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 95-118. En inglés en: Gagatsis A. (editor) (1999). *A multidimensional approach to learning in mathematics and science*. Nicosia: Intercollege. 3-24.
D'Amore B., Sandri P. (1998). Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-18. En francés (1998): *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 55-94.
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fandiño Pinilla M.I., D'Amore B. (2006). *Area e perimetro, aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.
Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. En: Chini Artusi L. (editor) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna, Zanichelli-UMI. 122-132.
Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, 112, 85-118. En italiano (1998): *La matematica e la sua didattica*. 2, 132-175.

Sarrazy B. (1996). *La sensibilité au contrat didactique: rôle des arrière-plans dans la résolution de problèmes arithmétiques au cycle trois*. Tesis de doctorado. Universidad de Bordeuax II.

Sarrazy B. (1997). Sens et situations: une mise en question de l'enseignement des stratégies métacognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 17, 2, 135-166.

Sarrazy B. (2002). Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem solving among pupils of 9-10 years. *European Journal of Education*. XVII, 4, 321-341.

Schoenfeld A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En: Schoenfeld A.H. (editor) (1987b). *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Lawrence Erlbaum Ass. 189-215.

Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla